Area-Funktionen

Aufgaben

Text Nr. 51112

Stand: 2. November 2017

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.schule

Zusammengesetzte Funktionen - Aufgaben

(1) Für welche Intervalle gelten folgende Identitäten:

(11) $\sinh(\operatorname{ar}\sinh(x)) = x$ und $\operatorname{ar}\sinh(\sinh(x)) = x$

(22) $\cosh(\operatorname{ar}\cosh(x)) = x$ und $\operatorname{ar}\cosh(\cosh(x)) = x$

(33) $\tanh(\operatorname{ar}\tanh(x)) = x$ und $\operatorname{ar}\tanh(\tanh(x)) = x$

(44) $\coth(\operatorname{ar}\coth(x)) = x$ und $\coth(\operatorname{ar}\coth(x)) = x$

(55) $\sec(\operatorname{ar}\operatorname{sech}(x)) = x$ und $\sec(\operatorname{ar}\operatorname{sech}(x)) = x$

(66) $\operatorname{csch}(\operatorname{ar}\operatorname{csch}(x)) = x$ und $\operatorname{ar}\operatorname{csch}(\operatorname{csch}(x)) = x$

(2) Finde einen einfacheren Term für

(12) $f(x) = \sinh(\operatorname{ar}\cosh(x))$

(13) $f(x) = \sinh(\operatorname{ar}\tanh(x))$

(14) $f(x) = \sinh(\operatorname{ar}\coth(x))$

(15) $f(x) = \sinh(\operatorname{ar}\operatorname{sech}(x))$

(16) $f(x) = \sinh(\operatorname{ar}\operatorname{csch}(x))$

(31) $f(x) = \tanh(\operatorname{ar}\sinh(x))$

(32) $f(x) = \tanh(\operatorname{ar}\cosh(x))$

(34) $f(x) = \tanh(\operatorname{ar}\coth(x))$

(35) $f(x) = \tanh(\operatorname{ar}\operatorname{sech}(x))$

(36) $f(x) = \tanh(\operatorname{ar}\operatorname{csch}(x))$

(21) $f(x) = \cosh(\operatorname{ar}\sinh(x))$

(23) $f(x) = \cosh(\operatorname{ar}\tanh(x))$

(24) $f(x) = \cosh(\operatorname{ar}\coth x))$

(25) $f(x) = \cosh(\operatorname{ar}\operatorname{sech} x))$

(26) $f(x) = \cosh(\operatorname{ar}\operatorname{csch} x))$

(41) $f(x) = \coth(\operatorname{ar}\sinh(x))$

(42) $f(x) = \coth(\operatorname{ar}\cosh(x))$

(43) $f(x) = \coth(\operatorname{ar}\tanh(x))$

(45) $f(x) = \coth(\operatorname{ar}\operatorname{sech}(x))$

(46) $f(x) = \coth(\operatorname{ar}\operatorname{csch}(x))$

Ab hier habe ich keine Lösungen mehr erstellt.

(51) $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{ar}\sinh(x))$

(52) $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{ar}\cosh(x))$

(53) $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{ar}\tanh(x))$

(54) $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{ar}\coth(x))$

(56) $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{ar}\operatorname{csch}(x))$

(61) $f(x) = \operatorname{csch}(\operatorname{ar}\sinh(x))$

(62) $f(x) = \operatorname{csch}(\operatorname{ar}\cosh(x))$

(63) $f(x) = \operatorname{csch}(\operatorname{ar}\tanh(x))$

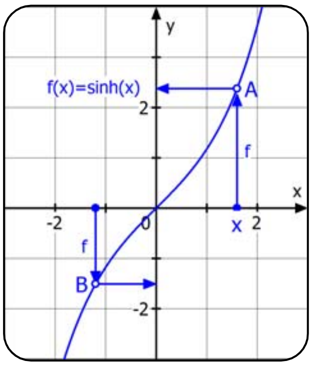
(64) $f(x) = \operatorname{csch}(\operatorname{ar}\coth(x))$

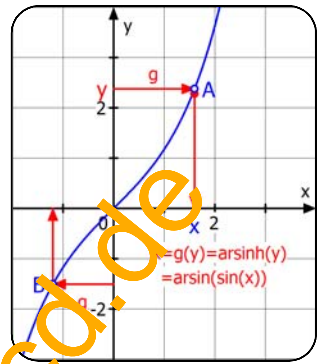
(65) $f(x) = \operatorname{csch}(\operatorname{ar}\operatorname{sech}(x))$

Lösung (1)

Für welche Intervalle gelten folgende Identitäten:

(11) Es sei $f(x) = \sinh(x)$, $g(y) = \operatorname{ar}\sinh(y)$





g kehrt die Zuordnung f in allen Bereichen des Definitionsbereich um, also gilt: Man benötigt dazu nicht das Schaubild von arsinh. Man dreht einfach die Zuordnungspfeile am sinh-Bild um.

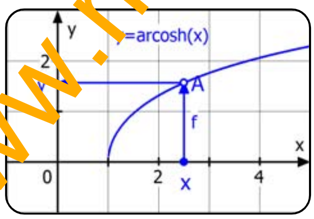
Man erkennt dann zwei Verkettungen:

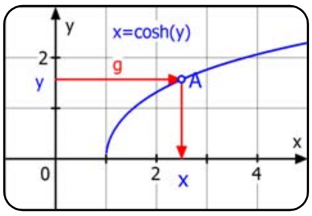
$$x \xrightarrow{f} f(x) = \sinh(x) = y \xrightarrow{g} g(y) = \operatorname{ar}\sinh(y) = \boxed{\operatorname{ar}\sinh(\sinh(x)) = x}$$

$$y \xrightarrow{g} g(y) = \operatorname{ar}\sinh(y) = x \xrightarrow{f} f(x) = \sinh(x) = \boxed{\sinh(\operatorname{ar}\sinh(y)) = y}$$

Ergebnis: $\sinh(\operatorname{ar}\sinh(x)) = x$ und $\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x$ gelten in $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(22) Es sei $f(x) = \operatorname{ar}\cosh(x)$ und $g(y) = \cosh(y)$





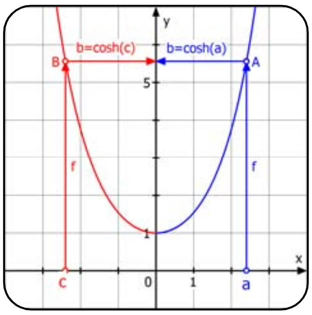
Die Anfangsfunktion arcosh(x) hat $\mathbf{D} = [1; \infty[$
Für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_{\operatorname{ar}\cosh} = [1; \infty[$ kann man f so so umkehren, dass gilt:

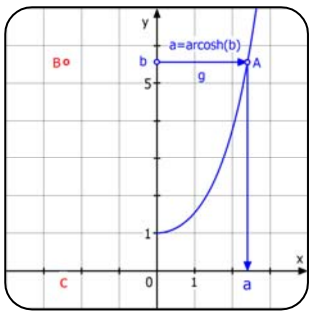
$$x \xrightarrow{f} f(x) = \operatorname{ar}\cosh(x) = y \xrightarrow{g} g(y) = \cosh(y) = \boxed{\cosh(\operatorname{ar}\cosh(x)) = x}$$

Erg: $\cosh(\operatorname{ar}\cosh(x)) = x$ gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_{\operatorname{ar}\cosh} = [1; \infty[$

Die Gleichung $\operatorname{ar}\cosh(\cosh(x)) = x$ gilt jedoch nur für $x \geq 0$:

Das liegt daran, dass cosh nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ umkehrbar ist. Man kehrt cosh nur für $x \geq 0$ um. Dies zeigen die Abbildungen:





Es sei $a > 0$ und $c = -a$. Dann gilt wegen der Symmetrie: $\cosh(a) = \cosh(c) = b$:

Für die Umkehrung ist jedoch festgelegt: $\operatorname{arcosh}(b) = a$ und nicht c.

$$a > 0 \xrightarrow{f} \cosh(a) = b \xrightarrow{g} \operatorname{ar}\cosh(b) = \boxed{\operatorname{ar}\cosh(\cosh(a) = a}$$

$$c > 0 \xrightarrow{f} \cosh(c) = b \xrightarrow{g} \operatorname{ar}\cosh(b) = \boxed{\operatorname{ar}\cosh(\cosh(c) = a \neq c}$$